7 - Junio - 2011 *Tiempo: 2 horas*

EXAMEN TEMA 3. Funciones de dos variables

Este examen tiene un valor del 30% de la nota final.

1. Calcular los siguientes límites*(0,3 ptos.)* $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2}$, *(0,7 ptos.)* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2}$

SOLUCIÓN

$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = \frac{6}{5}$, por sustitución directa

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{3\rho^3\cos\ \theta\sin^2\theta}{\rho^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right\}} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} 3\rho\cos\ \theta\sin^2\theta = 0$, al cumplirse que $\lim_{\rho\to 0} 3\rho = 0, \left|\cos\ \theta\sin^2\theta\right| \le 1, \forall\theta\in[0,2\pi)$

2. Estudiar la continuidad de la función *(1 ptos.)* $f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$

¿Es diferenciable en $(0,0)$? *(0,5 ptos.)*¿Por qué?

SOLUCIÓN

Al tratarse de una función racional será continua excepto quizás donde se anule el denominador. Pero den= x^2+y^2 =0, para $(x,y)=(0,0)$. Analicemos pués por la definición la continuidad en el origen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{0}{0}$$

Haciendo dicho límite por rectas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \left(\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}\right)^2 = \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 = \begin{cases} 0 & m=1 \\ \frac{9}{25} & m=2 \end{cases}$$

Lo cual demuestra que el límite depende de la recta por la que nos aproximemos al punto. Por lo tanto la función no tiene límite en el origen. Tratándose éste de un punto de discontinuidad.

Además al no ser continua no puede ser diferenciable en el punto citado.

7 - Junio - 2011 *Tiempo: 2 horas*

3. Para la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ (*1 ptos.*)calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

(0,5 ptos.)

SOLUCIÓN

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{-2xy}{x^2+y^2}\Bigg|\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}=\frac{2x^2y-2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Bigg|\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}=\frac{0}{0}$$ con lo cual ha de ser calculada por paso al límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{-2xy}{x^2+y^2}\Bigg|\begin{matrix}x=1\\y=1\end{matrix}=\frac{2y^2x-2x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Bigg|\begin{matrix}x=1\\y=1\end{matrix}=0$$

7 - Junio - 2011 *Tiempo: 2 horas*

4. (*1,5 ptos.)*Calcular el plano tangente a $f(x,y)=1-\frac{1}{10}(x^2+4y^2)$ en el punto $(1,1,\frac{1}{2})$

SOLUCIÓN Calculamos

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-\frac{1}{5},\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-\frac{4}{5}$

Y el plano tangente será: $z-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}(x-1)-\frac{4}{5}(y-1)\Leftrightarrow 2x+8y+10z-15=0$

5. (*2 ptos.)*Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$

SOLUCIÓN

Igualando a cero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+4y=0\\4x-4y=0\end{cases}$$

obtenemos dos puntos críticos

$$(0,0),(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$$

Calculamos la matriz Hessiana:

$Hf(x,y)=\begin{bmatrix}-6x & 4\\4 & -4\end{bmatrix}$ siendo, entonces $Hf(0,0)=\begin{bmatrix}0 & 4\\4 & -4\end{bmatrix}$ con determinante negativo, lo que indica que es un pto. De silla. Sin embargo $Hf(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\begin{bmatrix}-8 & 4\\4 & -4\end{bmatrix}$ con determinante positivo y como -8<0, indica que la función posee un máximo en este pto.

6. (*2,5 ptos.)*Calcular la integral doble:

$\iint_R (x+y)\,dxdy$, siendo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 9\}$

SOLUCIÓN

El recinto de integración es la parte superior de la corona circular centrada en el origen y de radios 1 y 3. Sus bordes circulares aconsejan un cambio a coord.. polares:

$$\iint_R (x+y)\,dxdy=\begin{Bmatrix}x=\rho Cos\theta\\y=\rho Sen\theta\end{Bmatrix}=\int_0^{\pi}\int_1^3\rho^2(Cos\theta+Sen\theta)d\rho d\theta=\frac{52}{3}$$